

MATEMATIIKKA

Matematiikkaa pintakäsittelijöille

Peruslaskutoimitukset

Isto Jokinen 2015

SISÄLTÖ

1. Laskujärjestys
2. Murtoluvuilla laskeminen
3. Suureet ja mittayksiköt
4. Potenssi
5. Juuri
6. Tekijäyhtälöiden ratkaiseminen

LASKUJÄRJESTYS

Laskujärjestys on seuraava:

1. Sulkeiden sisällä olevat lasketaan ensin
2. Jos sulkeita on useita sisäkkäin, lasketaan sisimmäisistä ulospäin
3. Kerto- ja jakolaskut
4. Yhteen ja vähennyslaskut
5. Vasemmalta oikealle jos peräkkäin yhteen-vähennys tai kerto-jakolaskuja.

Esimerkki 1.

$$32 + 8 - 5 \times 5 = 32 + 8 - 25 = 15$$

Esimerkki 2.

$$32 + (8 - 5) \times 5 = 32 + 3 \times 5 = 32 + 15 = 47$$

Esimerkki 3.

$$13 \times [4 + (6 - 3) \times 2] + 1 =$$

$$13 \times [4 + 3 \times 2] + 1 =$$

$$13 \times [4 + 6] + 1$$

$$13 \times 10 + 1 = 131$$

MURTOLUVUT

MURTOLUKUJEN KERTOLASKU

Murtolukujen kertolaskussa osittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

Esimerkki 4.

$$\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

Jos murtoluku kerrotaan kokonaisluvulla kerrotaan vain soittaja.

Esimerkki 5.

$$\frac{7}{3} \times 4 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$

MURTOLUKUJEN JAKOLASKU

Jos murtoluku jaetaan kokonaisluvulla jaetaan vain osoittaja.

Esimerkki 6.

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$$

Jos murtoluku jaetaan toisella murtoluvulla vaihdetaan jakajan osoittaja nimittäjä keskenään. Tämän jälkeen jaettava murtoluku kerrotaan saadulla jakajalla.

Esimerkki 7.

$$\frac{6}{8} \div \frac{3}{5} = \frac{6}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$$

MURTOLUKUJEN YHTEENLASKU

Murtolukujen yhteenlaskussa on nimittäjiksi saatava sama luku laventamalla.

Esimerkki 8.

$$\frac{3^3)3}{5} + \frac{5^5)2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15}$$

Jos yhteen laskettavia termejä on useita tehdään lavennus muiden termien nimittäjien tulolla.

Esimerkki 9.

$$\frac{3 \times 4)1}{2} + \frac{2 \times 4)2}{3} + \frac{2 \times 3)3}{4} = \frac{12}{24} + \frac{16}{24} + \frac{18}{24} = \frac{46^{(2)}}{24} = \frac{23}{12}$$

MURTOLUKUJEN VÄHENNYSLASKU

Murtolukujen vähennyslaskuissa on nimittäjät lavennettava ensin samannimisiksi kuten yhteenlaskussa.

Esimerkki 10.

$$\frac{7^7)3}{4} - \frac{4^4)2}{7} = \frac{21}{28} - \frac{8}{28} = \frac{13}{28}$$

Jos vähennyslaskussa on useampi tekijä lavennetaan luvut muiden tekijöiden tulolla.

$$\frac{3 \times 4) 6}{2} - \frac{2 \times 4) 2}{3} - \frac{2 \times 3) 3}{4} = \frac{72}{24} - \frac{16}{24} - \frac{18}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

ERI LASKUTOIMITUKSIA SEKAISIN

Jos murtolukulaskuissa on kerto-, jako-, yhteen- ja vähennyslaskuja sekaisin on laskujärjestys kuten yleensäkin:

1. Ensin kerto- ja jakolaskut
2. Sitten yhteen- ja vähennyslaskut

Esimerkki 12.

$$\frac{7}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{5} = \frac{7}{15} + \frac{3) 8}{5} = \frac{7}{15} + \frac{24}{15} = \frac{31}{15}$$

SEKALUKUJEN KERTO-, JAKO-, YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Sekaluvut pitää ennen laskemista muuttaa murtoluvuiksi. Tämän jälkeen lasketaan murtolukuina kuten edellä.

Esimerkki 13. Sekalukuja murtolukuina

$$3\frac{7}{12} = \frac{(3 \times 12) + 7}{12} = \frac{43}{12}$$

$$12\frac{1}{4} = \frac{(12 \times 4) + 1}{4} = \frac{49}{4}$$

Osoittajassa ja nimittäjässä olevat laskutoimitukset lasketaan ensin. Tämän jälkeen tehdään jakolasku.

Esimerkki 14.

$$\frac{3 \times 7 + 29}{(12 - 7) \times 2} = \frac{21 + 29}{5 \times 2} = \frac{50}{10} = 5$$

Esimerkki 15.

$$\frac{3 \times 7 + \frac{87}{3}}{(12 - 7) \times \frac{8}{4}} = \frac{21 + 29}{5 \times 2} = \frac{50}{10} = 5$$

TEKIJÖINÄ MUUTTUJIA

KERTOLASKUT

Esimerkki 16. $6a \times 4b \times 5c = 120abc$

Esimerkki 17. $\frac{4a \times 5c}{10b} = \frac{20ac}{10b} = 2 \frac{ac}{b}$

Esimerkki 18. $\frac{12x}{5y} \times \frac{15yz}{4xq} = \frac{180xyz}{20yxq} = 9 \frac{z}{q}$

JAKOLASKUT

$$\frac{25x}{5y \times 3} : 5 = \frac{25x}{15y} \times \frac{1}{5} = \frac{25x}{75y} = \frac{2x}{3y}$$

$$\frac{32a}{256b} : \frac{12ay}{72b} = \frac{32a}{256b} \times \frac{72b}{12ay} =$$

$$\frac{a}{8b} \times \frac{6b}{ay} = \frac{3b}{4y}$$

YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKUT

Esimerkki 20. $\frac{4x}{3y} + \frac{5x}{4y} = \frac{16x}{12y} + \frac{15x}{12y} = \frac{31x}{12y}$

Esimerkki 21. $\frac{5x}{3yz} + \frac{8x}{4y} = \frac{20x}{12yz} + \frac{24xz}{12yz} = \frac{20x + 24xz}{12yz}$

Esimerkki 22. $\frac{5xz}{3yz} - \frac{2x}{4y} = \frac{20xz}{12yz} - \frac{6xz}{12yz} = \frac{14xz}{12yz} = \frac{7x}{6y}$

SUUREET JA MITTAYKSIKÖT

Suure = lukuarvo $\times$ yksikkö

Esimerkiksi 18 kg:ssa 18 on lukuarvo ja kg yksikkö. Kansainvälisessä yksikköjärjestelmässä (SI-järjestelmässä) on seitsemän perussuuretta ja perusyksikköä. Kaikki muut suureet ja yksiköt on johdannaisyksikköjä jotka perustuvat perussuureisiin ja perusyksiköihin. Suureilla on myös tunnukset. Esimerkiksi massan tunnus on m ja ajan tunnus t.

PERUSSUUREET

Suure	Tunnus	Yksikkö
Pituus	l	m
Massa	m	kg
Aika	t	s
Lämpötila	T	K
Ainemäärä	n	mol
Sähkövirta	I	A
Valovoima		Cd

JOHDANNAISSUUREET

Johdannaisuuureita on hyvin paljon. Esimerkiksi nopeus (m/s) on matka jaettuna ajalla. Kiihtyvyys (m/s²) on nopeus jaettuna ajalla. Voima taas on massa kertaa kiihtyvyys (kgm/s²) ja työ voima kerrottuna matkalla (kgm/s² $\times$ m).

Molekyyylimassa on massa jaettuna ainemäärällä kg/mol. Konsentraatio on ainemäärä jaettuna tilavuudella (mol/dm³), jossa taas yksikkö dm³ taas on pituuden yksikkö dm³ on pituuden yksikkö dm korotettuna kolmanteen potenssiin.

KERRANNAISYKSIKÖT

Kun jonkin suureen lukuarvo on hyvin suuri tai pieni, käytetään kerrannaisyksikköjä. Tällöin suureen suuruus on helpompi hahmottaa. Esimerkiksi matkan ilmoittaminen metreinä ei olisi selkeää, kun se olisi 420000 m. Selkeämpää on ilmoittaa matka kilometreinä, jolloin se on 420 km. Maalikerroksen paksuus taas on hyvä ilmoittaa mikrometreinä (µm) eikä metreinä. Esim. 180 µm on sopivampi kuin 0,000180 m.

Kerrannaisyksiköitä tulisi käyttää niin, että suureen lukuarvo on välillä 1-999. Esimerkiksi 50 mg on sopivampi tapa ilmoittaa massa kuin 0,05 g tai 0,00005 kg.

Yleisimmin käytettävät kerrannaisyksiköt:

Nimi	Lyhenne	Kerroin
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
-	-	1
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}

Potenssi

Potenssilaskuissa kantaluku kerrotaan itsellään eksponentin mukaan.

Esimerkki 23.

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7776$$

Potenssilaskujen laskusäännöt:

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$$

$$(a^x)^y = a^{x \times y}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Esimerkkejä 24.

$$2^3 + 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

$$\left(\frac{2^5}{2^2}\right) = 2^{5-2} = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(3^3)^2 = 3^{3 \times 2} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$$

$$(5 \times 3)^2 = 5^2 \times 3^2 = 25 \times 9 = 225$$

$$(5 \times 3)^2 = 15^2 = 225$$

Esimerkkejä 25.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

JUURI

Juurin on potenssin vastakkainen laskutoimitus

Esimerkkejä 26.

Neliöjuuri luvusta 25 on 5 koska $5^2 = 25$.

Neliöjuuri luvusta 81 on 9, koska $9^2 = 81$.

Kuutiojuuri luvusta 27 on 3, koska $3^3 = 27$.

Neljäs juuri luvusta 256 on 4, koska $4^4 = 256$.

Kahdeksas juuri luvusta 390625 on 5, koska $5^8 = 390625$

TEKIJÄYHTÄLÖN RATKAISEMINEN

Tekijäyhtälöiden ratkaisua tarvitaan hyvin paljon fysiikassa, kemiassa, teknisessä laskennassa ja ongelmanratkaisutehtävissä. Tämän vuoksi tekijäyhtälöiden ratkaisun hallinta on hyvin tärkeää.

Esimerkki 27. Tekijäyhtälöitä:

$$n = \frac{I \times t}{z \times F}$$

$$U = R \times I$$

$$PV = nRT$$

$$a = \frac{(v_1 - v_0)}{t}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$n = \frac{m}{M}$$

Tekijän yhtälöstä pitää ratkaista se tekijä jota kysytään tehtävässä. Esimerkiksi jos kysytään vastusta (R), on yhtälöstä ratkaistava se. Jos yhtälössä on pelkkiä kerto- ja jakolaskuja voidaan termejä siirtää yhtälön puolilta toisiin kun niiden paikat vaihdetaan nimittäjästä osoittajaan ja päinvastoin. Tämä vastaa puolittain kertomista ja jakamista, mutta on yksinkertaisempaa tehdä. Teknisessä laskennassa laskukaavat ovat olemassa, mutta niistä joudutaan usein ratkaisemaan kysytty tekijä.

Esimerkki 28. Termien siirtoa yhtälöiden puolista toisille. Ratkaistaan R, I, P, V ja R.

$$U = R \times I$$

$$P \times V = n \times R \times T$$

$$\frac{U}{I} = R$$

$$P = \frac{n \times R \times T}{V}$$

$$\frac{U}{R} = I$$

$$V = \frac{n \times R \times T}{P}$$

$$\frac{P \times V}{n \times T} = R \rightarrow R = \frac{P \times V}{n \times T}$$

Esimerkki 29. Termien siirtoa kun laskukaavasta halutaan ratkaista I.

Laskukaava on muotoa:

$$\frac{m}{M} = \frac{I \times t}{z \times F}$$

Kun I ratkaistaan on kaikki muut tekijät paitsi I siirrettävä yhtälön toiselle puolelle. Saadaan:

$$\frac{m \times z \times F}{M \times t} = I \rightarrow I = \frac{m \times z \times F}{M \times t}$$

Tämän jälkeen sijoitetaan lukuarvot m,z,F,M ja t:n paikoille ja ratkaistaan tehtävä.

Jos tekijäyhtälössä on yhteen- ja vähennyslaskua on termit vähennettävä tai lisättävä puolittain.

Esimerkki 30. Kiihtyvyyden yhtälöstä ratkaistaan loppunopeus v_2

$$a = \frac{(v_2 - v_1)}{t}$$

$$a \times t = (v_2 - v_1)$$

$$a \times t + v_1 = v_2$$