

MATEMATIIKKA

Matematiikkaa pintakäsittelijöille

Ongelmanratkaisu

Isto Jokinen 2017

SISÄLTÖ

1. Matemaattisten ongelmien ratkaisu laskukaavoilla
2. Tekijänyhtälöt
3. Laskukaavojen yhdistäminen
4. Yhtälöiden muodostaminen matemaattiseen ongelmaan

MATEMAATTISTEN ONGELMIEN RATKAISU LASKUKAAVOILLA

Matematiikan avulla voidaan ratkaista luonnontieteisiin ja tekniikkaan liittyviä ongelmia. Usein ongelmia voidaan ratkaista valmiiden laskukaavojen avulla. Ongelmien ratkaiseminen vaatii kuitenkin perustietämystä suureista ja niiden yksiköistä ja kertoimista. Toki näiden tietojen puute voidaan korvata tutustumalla kaavastojen sisältöön. Tiedot löytyvät niistä. Laskukaavat ovat itse asiassa tekijäyhtälöitä.

Usein kysyttävä termi ei ole se joka on yksin laskukaavassa yhtälön vasemmalla puolella. Tällöin tarvitaan tekijäyhtälön ratkaisu.

Laskeminen laskukaavoilla on usein helpompaa kun noudattaa seuraavaa ratkaisutapaa:

1. Mieti mitä kysytään ja merkitse se omalla suuretunnuksella. Esim. kun kysytään massaa merkitse se seuraavasti: m ? Tässä kohtaa pitää tietää että massan suuretunnus on m .
2. Katso tehtävästä mitä tiedetään ja merkitse ne omilla tunnuksilla. Esim. kun tiedetään voima ja kiihtyvyys merkitse ne seuraavasti: $F = 500 \text{ N}$ ja $a = 5 \text{ m/s}^2$. Tässä pitää tietää että voiman suuretunnus on F ja kiihtyvyyden a . Samoin niiden yksiköt N ja m/s^2 .
3. Selvitä mitkä laskukaavat sopivat laskemiseen. Ne ovat sellaisia joissa esiintyy kysytty termi (m) ja tiedetyt termit (F ja a).
4. Jos laskukaavoissa on tehtävä tekijän yhtälön muokkausta tee se. Jos tarvitaan eri laskukaavojen yhdistämistä, niin tee sekin.
5. Tee tarvittaessa laatumuunnokset (esim. m/s / km/h). Jotta tulos voidaan saada oikein on käytettävä oikeita yksiköitä. Käytä laskujen välivaiheissa aina yksiköitä. Näin yksiköitä supistettaessa nähdään onko tulos oikein. Jos yksiköksi tulee kysymystä vastaava yksikkö on lasku yleensä aina laskettu oikein.
6. Sijoita arvot ja ratkaise tehtävä

TEKIJÄYHTÄLÖN RATKAISEMINEN

Esimerkki 1. Tekijäyhtälöitä:

$$n = \frac{I \times t}{z \times F}$$
$$a = \frac{(v_1 - v_0)}{t}$$

$$U = R \times I$$

$$PV = nRT$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$n = \frac{m}{M}$$

Tekijän yhtälöstä pitää ratkaista se tekijä jota kysytään tehtävässä. Esimerkiksi jos kysytään vastusta (R), on yhtälöstä ratkaistava se. **Jos yhtälössä on pelkkiä kerto- ja jakolaskuja voidaan termejä siirtää yhtälön puolilta toisiin kun niiden paikat vaihdetaan nimittäjästä osoittajaan ja päinvastoin.** Tämä vastaa puolittain kertomista ja jakamista, mutta on yksinkertaisempaa tehdä. Teknisessä laskennassa laskukaavat ovat olemassa, mutta niistä joudutaan usein ratkaisemaan kysytty tekijä.

Esimerkki 2. Termien siirtoa yhtälöiden puolista toisille. Ratkaistaan R , I , P , V ja R .

$$U = R \times I$$

$$\frac{U}{I} = R$$

$$\frac{U}{R} = I$$

$$P \times V = n \times R \times T$$

$$P = \frac{n \times R \times T}{V}$$

$$V = \frac{n \times R \times T}{P}$$

$$\frac{P \times V}{n \times T} = R \rightarrow R = \frac{P \times V}{n \times T}$$

Esimerkki 3. Termien siirtoa kun laskukaavasta halutaan ratkaista I .

Laskukaava on muotoa:
$$\frac{m}{M} = \frac{I \times t}{z \times F}$$

Kun I ratkaistaan on kaikki muut tekijät paitsi I siirrettävä yhtälön toiselle puolelle. Saadaan:

$$\frac{m \times z \times F}{M \times t} = I \rightarrow I = \frac{m \times z \times F}{M \times t}$$

Tämän jälkeen sijoitetaan lukuarvot m, z, F, M ja t :n paikoille ja ratkaistaan tehtävä. Jos tekijäyhtälössä on yhteen- ja vähennyslaskua on termit vähennettävä tai lisättävä puolittain.

Esimerkki 4. Kiihtyvyyden yhtälöstä ratkaistaan loppunopeus v_2

$$a = \frac{(v_2 - v_1)}{t}$$

$$a \times t = (v_2 - v_1)$$

$$a \times t + v_1 = v_2$$

LASKUKAAVAN SIOITTAMINEN TOISEEN LASKUKAAVAAN

Usein ongelmaa ratkaistaessa tullaan tilanteeseen jossa kaavastosta löytyy laskukaavoja, mutta mikään niistä ei sovi suoraan laskemiseen.

Esimerkki 3. Tehtävä on seuraavanlainen: Monta grammaa 4 litraan vettä on liuotettava kiinteää NaOH:a, jotta sen konsentraatioksi tulee 0,1 mol/l. Käyttämällä ”systeemiä” ratkaisu etenee seuraavasti:

1. $m = ?$

2. $c = 0,1 \text{ mol/l}$; $V = 4 \text{ l}$

3. Kaavastosta löytyy laskukaava: $c = \frac{n}{V}$, jonka avulla tehtävää ei voida ratkaista koska

ainemäärää n ei tiedetä. Kaavastosta löytyy myös kaava: $n = \frac{m}{M}$ josta siitäkään ei tiedetä

tekijää M , mutta se voidaan aina laskea. Sijoittamalla kaava $n = \frac{m}{M}$ kaavaan $c = \frac{n}{V}$ saadaan

laskukaava jolla tehtävä voidaan ratkaista: Sijoittamisessa n tilalle sijoitetaan kaavaan $\frac{m}{M}$

jolloin laskukaavaksi saadaan: $c = \frac{m}{V \times M}$. Nyt käytössä on kaava jolla tehtävä voidaan laskea.

4. Kaava vaatii kuitenkin muokkausta, koska kysytyn termin m kanssa yhtälön samalla puolella on muita tekijöitä (V ja M). Kun nämä siirretään yhtälön toiselle puolelle saadaan:
 $m = c \times V \times M$. Tämän kaavaan sijoitetaan lukuarvot yksiköineen ja lasku lasketaan.

5. $m = 0,1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \times 4 \text{ l} \times 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 16 \text{ g}$; TÄSSÄ KOHTAA PITÄÄ TARKISTAA ETTÄ
YKSIKKÖ ON OIKEA. JOS EI OLE NIIN JOTAIN ON MENNYT VÄÄRIN.

YHTÄLÖIDEN MUODOSTAMINEN MATEMAATTISIIN ONGELMIIN

Usein matemaattisin keinoin ratkaistavat ongelmat ovat sellaisia, että niihin ei löydy valmiita laskukaavoja. Tällöin ongelmat ratkaistaan luomalla itse yhtälö jonka avulla ongelma ratkeaa. Yhtälöiden luominen on selvästi vaativampaa kuin valmiiden laskukaavojen käyttö. Esimerkissä 4 vaativin osuus on yhtälön luominen. Sen jälkeen yhtälön ratkaiseminen on ”mekaanista laskemista” totuttujen laskusääntöjen mukaan.

Esimerkki 4. Ratkaistavana ongelmana on laimentuneen hapon väkevöittäminen haluttuun pitoisuuteen. Koska lisättävä happo ei ole 100%:sta, niin laskemiseen tarvitaan yhtälö.

Suolahappoliuosta on 8 kg ja sen pitoisuus on 12 p-%. Paljonko siihen tulee lisätä 36 p-%:sta suolahappoa jotta saadaan 20 p-%:en suolahappoa?

Tehtävä ratkaistaan seuraavan yhtälön avulla:

$$8kg \times 0,12 + x \times 0,36 = (8kg + x) \times 0,2$$

Yhtälö koostuu kolmesta osasta:

$8kg \times 0,12$; tämä osa on alkuperäinen happo jonka määrä ja pitoisuus tiedetään

$x \times 0,36$; tämä osa on lisättävä happo jonka pitoisuus tiedetään, mutta määrää ei. Määrä merkitään X:ksi.

$(8kg + x) \times 0,2$; tämä osa on valmistettava happoseos. Tässä 8 kg on alkuperäisen happoliuoksen määrä, X lisättävän happoliuoksen määrä ja 0,2 valmiin seoksen pitoisuus.

Tämän jälkeen yhtälö ratkaistaan:

$$0,96kg + 0,36x = 1,6kg + 0,2x$$

$$0,36x - 0,2x = 1,6kg - 0,96kg$$

$$0,16x = 0,64kg$$

$$X = \frac{0,64kg}{0,16} = 4kg$$

Laskutoimituksen tarkastus:

Valmiin seoksen suolahapon kokonaismäärä on:

$$8kg \times 0,12 + 4kg \times 0,36 = 2,4 \text{ kg}$$

Valmiin seoksen veden kokonaismäärä on:

$$8kg \times 0,88 + 4kg \times 0,64 = 9,6 \text{ kg}$$

Pitoisuus prosentteina on:

$$\frac{2,4kg}{12kg} \times 100\% = 20\%$$

Esimerkki 5. Matias, Janita ja Aapo jakavat 1200 euron rahasumman seuraavasti: Janita saa 67 euroa vähemmän kuin Aapo ja Matias 83 euroa vähemmän kuin Aapo. Kuinka paljon kukin rahaa saa?

Ongelma voidaan ratkaista yhtälön avulla. Aluksi on päätettävä mikä valitaan muuttujaksi X. Tässä on luontevaa, että se on Aapon saama rahasumma. Tällöin Janitan saama rahasumma on X-67 euroa ja Matiaksen saama rahasumma X-83 euroa. Saadaan yhtälö:

$$X + X - 67e + X - 83e = 1200e$$

Ratkaisemalla yhtälöstä X saadaan Aapon rahasumma ja sen avulla voidaan laskea muut.

$$X + X + X = 1200e + 67e + 83e$$

$$3X = 1350$$

$$X = \frac{1350e}{3} = 450e$$

Janitan summa on $450e - 67e = 383e$

Matiaksen summa on: $450e - 83e = 367e$

Tarkistus: $450e + 383e + 367e = 1200e$

Esimerkki 6. Kun kolme peräkkäistä parillista lukua lasketaan yhteen saadaan tulokseksi 132. Mitkä nämä luvut ovat? Olkoon ensimmäinen luku X. Tällöin yhtälöksi saadaan:

$$X + X + 2 + X + 4 = 132$$

$$3X = 132 - 2 - 4 = 126$$

$$X = \frac{126}{3} = 42$$

Muut luvut ovat tällöin 44 ja 46

Tarkistus: $42 + 44 + 46 = 132$

Esimerkki 7. Jaa luku 360 kahteen osaan niin, että toinen luku on $\frac{1}{4}$ osa toisesta.

$$X + \frac{1}{4}X = 360$$

$$1\frac{1}{4}X = 360$$

$$\frac{5}{4}X = 360$$

$$X = 360 \times \frac{4}{5} = 288$$

288 on suurempi luku. Pienempi luku on $288/4 = 72$

Tarkistus: $288 + 72 = 360$.

Esimerkki 8. Mikä on se luku, joka kerrottuna kuudella on 14 verran suurempi kuin kerrottuna neljällä?

$$6 \times X = 4 \times X + 14$$

$$6X - 4X = 14$$

$$2X = 14$$

$$X = 7$$

Esimerkki 9.

Neliön sivuihin lisätään 2 m, jolloin sen pinta-alaksi saadaan 1024 m^2 . Mikä oli alkuperäisen neliön sivun pituus?

Uuden neliön sivun pituus on:

$$X = \sqrt{1024 \text{ m}^2} = 32 \text{ m}$$

Alkuperäisen neliön sivun pituus oli 30 m.

Esimerkki 10. Yrityksellä tekee kahdenlaisia kärryjä. Toisessa mallissa on yksi pyörä ja toisessa kaksi. Varastossa on 70 pyörää ja ne pitäisi käyttää 46 kärryn valmistukseen: Montako yksi- ja kaksi pyöräistä kärryä voidaan valmistaa?

Tämän kaltainen ongelma voidaan ratkaista yhtälöparin avulla. Olkoon yksipyöräisten kärryjen määrä X kpl ja kaksipyöräisten kärryjen määrä Y kpl. Tällöin voidaan kirjoittaa yhtälöt.

$$X+Y=46 \quad (= \text{valmiiden kärryjen määrä})$$

$$X+2Y=70 \quad (= \text{pyörien kokonaismäärä})$$

Yhtälöparin ratkaisuun käytetään sijoitusmenetelmää, jossa ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan X ja tämän jälkeen saatu lauseke sijoitetaan alempaan yhtälöön. X:ksi saadaan:

$$X=46-Y$$

sijoitus

$$46-Y+2Y=70$$

Y:n ratkaiseminen:

$$-Y+2Y=70-46$$

$$Y=24$$

X:n ratkaiseminen

$$X+Y=46 ; Y=24 \text{ jolloin}$$

$$X+24=46$$

$$X=46-24=22$$